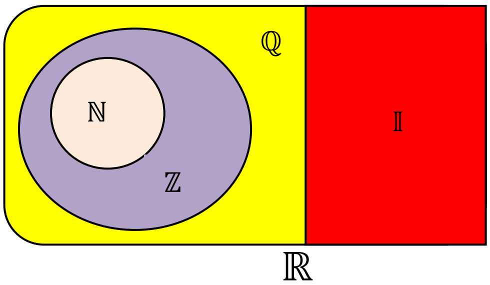
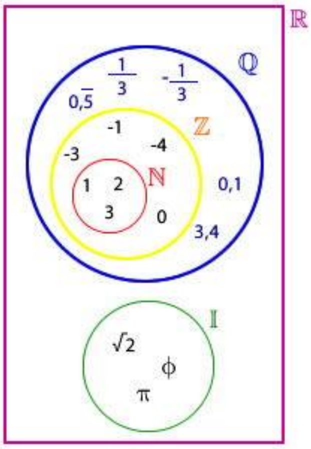
INSTITUTO FRAY MAMERTO ESQUIU
4ºC MATEMÁTICA

El Conjunto de los números Reales

El Conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$) está formado por el conjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$) y el de los irracionales ($\mathbb{I}$). En símbolos: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

Gráficamente:





De este modo, podemos hablar de completitud de la recta numérica: cada punto de la recta representa un número real, y todo número real está representado en la recta.

Radicación. Raíz n-ésima de un número

Definición:Dado un número real **a** y un entero positivo **n**, se llama raíz **n-ésima** de **a,** a otro número real **b,** tal que, **b** elevado a **n** es igual a **a.**

En símbolos: $\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a \qquad (n > 0)$

Lenguaje Formal	*Ejemplos*
1) Exponentes racionales $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{m/n} \qquad con\ a > 0, \qquad m, n \in \mathbb{N}$	1) $\left(\sqrt[3]{8}\right)^4 = \sqrt[3]{8^4} = 8^{4/3}$
2) Distributiva en multiplicación y división $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b} \qquad con\ a, b > 0 \quad n \in \mathbb{N}$ $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	2) $\sqrt{4.5} = \sqrt{4}.\sqrt{5}$ $\sqrt[3]{\frac{64}{8}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{4}{2}$
3) Raíz de raíz $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$	3) $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$
4) Simplificación de radicales • $Si\ n\ es\ par \Rightarrow \sqrt[n]{a^n} = \lvert a \rvert$ • $Si\ n\ es\ impar \Rightarrow \sqrt[n]{a^n} = a$	4) $Si\ n\ es\ par \quad \sqrt[6]{2^6} = \lvert 2 \rvert = 2$ $\sqrt[6]{(-2)^6} = \lvert 2 \rvert = 2$ $Si\ n\ es\ impar \quad \sqrt[3]{5^3} = 5$ $\sqrt[3]{(-5)^3} = -5$
5) Radicales equivalentes: Una raíz enésima positiva no varía si se multiplican o dividen por un mismo número el índice y el exponente del radicando. $\sqrt[n]{a^r} = \sqrt[n.m]{a^{r.m}} \qquad con\ \ m, r > 0$ $\sqrt[n]{a^r} = \sqrt[n:m]{a^{r:m}} \qquad con\ \ m, r > 0\ \ y\ m\ \ es\ divisor\ de\ n\ y\ r$	5) $\sqrt[5]{3^2.a^3} = \sqrt[5.2]{(3^2)^2.(a^3)^2} =$ $\sqrt[10]{3^4.a^6}$ $\sqrt[9]{5^3.a^6} = \sqrt[9:3]{5^{3:3}.a^{6:3}} = \sqrt[3]{5.a^2}$

Casos particulares:

- $Si\ n\ es\ par\ y\ a \geq 0 \ \Rightarrow \sqrt[n]{a} = b \ \ y\ \ b \geq 0$
- $Si\ n\ es\ par\ y\ a < 0 \ \Rightarrow \sqrt[n]{a} = \nexists\ en\ \Re$
- $Si\ n\ es\ impar\ \ y\ a \in \Re \Rightarrow \sqrt[n]{a} = b\ \ y\ \ b \in \Re$

¡Nota Importante!

- ✓ No siempre la suma de dos números irracionales es otro número irracional.
  Ejemplo: $-\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0 \ \in \ \mathbb{Q}$
- ✓ No siempre el producto de dos números irracionales es otro número irracional.
  Ejemplo: $\sqrt{5} . \sqrt{5} = 5 \ \in \ \mathbb{Q}$

Extracción de factores fuera del radical

Teniendo en cuenta las propiedades de la radicación, pueden extraerse factores fuera del radical, cuando los factores que figuran en el radicando sean potencias de exponente mayor o igual que el índice de la raíz. En algunos casos es necesario factorear el radicando.

Por ejemplo:

$\sqrt[2]{8} = \sqrt[2]{2^3}$. Descomponer el ocho en factores primos.

$= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$. Descomponer el exponente en suma de potencias de igual base.

$= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$. Distribuir el radical en cada factor, y simplificar índice y exponente.

$= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$. El factor 2 queda fuera del radical y éste queda reducido a su mínima expresión.

$$\sqrt[3]{81a^{14}} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$\sqrt[3]{a^6 . b^2 . c^{17}} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

¡Nota Importante!

Cuando aplicamos el procedimiento antes descripto, el número sigue siendo el mismo (por eso se utiliza el signo igual entre las expresiones); lo único que logramos es cambiar el aspecto, o sea la forma de expresarlo. Puede verificarse con la calculadora que:

$$\sqrt[2]{8} = 2.\sqrt{2} \cong 2{,}828427125 \ldots$$

Trabajo Práctico Nº1- Números Reales. Irracionales

1) Descubrir la regla de formación de los siguientes números irracionales y luego escribe los seis números siguientes:
   a) 1,33343536 …
   b) 0,808800888000 …
   c) 321, 612244896 …
2) Decidir si las siguientes afirmaciones son V o F; en caso de falsedad exhiban un contraejemplo:

a) La unión del conjunto de los números enteros con el de los racionales forman el conjunto de los números reales.

b) Todo número real es racional.

c) Todo número racional es entero.

d) Todo número irracional es real.

e) Existen números reales que al elevarlos al cuadrado dan negativos.

f) Existen “huecos” en la recta numérica que no son ocupados por ningún número real.
g) Si a y b son números reales, entonces a es mayor que b o b es mayor que a.
h) Todo número natural es real.
i) Siempre consigo un resultado al calcular la raíz cuadrada de un número real.
j) La suma de un racional con un irracional es un número racional.
k) La multiplicación entre dos números irracionales puede dar un número racional.

3) Calcular aplicando las propiedades correspondientes.

$a)\ \sqrt{2}\,.\sqrt{10}.\sqrt{5} =$

$b)\ \sqrt{125} : \sqrt{5} =$

$c)\ \sqrt[4]{3^6} =$

$d)\ \sqrt{90} : (\sqrt{2}.\sqrt{5}) =$

$e)\ \sqrt[3]{\sqrt{a^{12}}} =$

$f)\ \sqrt[3]{2}.(\sqrt[3]{8} : \sqrt[3]{2}) =$

$g)\ \sqrt{\sqrt{\frac{1}{a^{12}}}} =$

$h)\ (\sqrt{12}.\sqrt{6}) : \sqrt{2} =$

4) Simplificar al máximo cada expresión, extrayendo factores del radical:

$a)\ \sqrt{27}$

$b)\ \sqrt{45}$

$c)\ \sqrt{252}$

$d)\ \sqrt[3]{32}$

$e)\ \sqrt{684}$

$f)\ \sqrt[4]{243}$

$g)\ \sqrt{8x^6a^3}$

$H)\ \sqrt[3]{8a^3x^4}$

$i)\ \sqrt{200a^5b^7m^6}$

$j)\ \sqrt[4]{10000a^8b^8y^3}$

$k)\ \sqrt[5]{\frac{1}{32}x^{10}y^{12}z^6}$

Radicales semejantes

Se llaman radicales semejantes a aquellos que tienen el mismo índice y el mismo radicando. Únicamente pueden diferir sus coeficientes.

Por ejemplo:

$3\sqrt{2}$ y $-5\sqrt{2}$ son radicales semejantes; 3 y -5 son los coeficientes

$-4a\sqrt[3]{b^2}$ y $-4\sqrt[3]{b^2}$ son radicales semejantes; $-4a$ y -4 son coeficientes pero distintos.

$5\sqrt{a}$ y $5\sqrt[3]{a}$ no son radicales semejantes, aunque sus coeficientes son iguales

OPERACIONES CON NÚMEROS IRRACIONALES

Adición y sustracción (Suma algebraica)

La suma algebraica de números irracionales semejantes, es otro irracional semejante a los dados, cuyo coeficiente es la suma algebraica de los coeficientes de cada uno de ellos.

Ejemplos

$$a)\quad \underbrace{3\sqrt{2} + \tfrac{5}{4}\sqrt{2} - \sqrt{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2} - 4\sqrt{2}}_{\text{En los cinco términos los radicales son semejantes.}} = \underbrace{\left(3 + \tfrac{5}{4} - 1 + \tfrac{1}{2} - 4\right)}_{\text{Suma algebraica de coeficientes.}}\sqrt{2} = -\tfrac{1}{4}\sqrt{2}$$

$b)\quad 2\sqrt[3]{81} - 4\sqrt[3]{24} =$

$= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

$= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

- *Los radicales no son semejantes aparentemente.*
- *Factorear los radicandos.*
- *Descomponer los exponentes en sumas para poder extraer factores del radical.*
- *Distribuir los radicales en el producto y simplificar índice y exponente.*
- *Multiplicar los coeficientes.*
- *Como los radicales ya se transformaron en semejantes puedo operar con los coeficientes.*

$c)\quad \sqrt{2} + 2\sqrt[4]{36} - \sqrt{8} + \sqrt{54} =$

$= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

$= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

$= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

$= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

$= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

$= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

- *Los radicales no son semejantes aparentemente.*
- *Factorear los radicandos.*
- *Distribuir y simplificar.*

- *Se asocian los radicales que no se simplificaron totalmente, porque son de igual índice.*
- *Los radicales no son todos semejantes.*
- *Agrupo los que son semejantes y opero con sus coeficientes*
- *La adición de radicales no semejantes queda indicada.*

5) Realizar las siguientes sumas algebraicas entre radicales:

a) $\sqrt{45} - \sqrt{27} - \sqrt{20} =$
b) $\sqrt{75} - \sqrt{147} - \sqrt{675} - \sqrt{12}$
c) $\sqrt{175} - \sqrt{243} - \sqrt{63} - 2\sqrt{75} =$
d) $\frac{2}{9}\sqrt{20} - \sqrt{45} - \frac{3}{7}\sqrt{125} - \sqrt{98} =$
e) $7\sqrt{450} - \sqrt{320} - \frac{14}{3}\sqrt{80} - \frac{2}{5}\sqrt{800} =$
f) $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{24} + \frac{3}{28}\sqrt[3]{16} =$
g) $\sqrt[3]{875} - \frac{1}{7}\sqrt[3]{448} + \frac{35}{8}\sqrt[3]{189} =$
h) $\sqrt[3]{40} - \sqrt[3]{625} + \sqrt[3]{135} + \frac{\sqrt[3]{5}}{2} =$

Multiplicación de números irracionales

El producto de números irracionales de igual índice es otro irracional cuyo índice es el mismo y cuyo radicando es el producto de los radicandos de cada uno de ellos. Ejemplos:

$a)\ \sqrt[5]{500}.\sqrt[5]{50} =$ $\qquad b)\ \sqrt[3]{81a^5}.\sqrt[3]{40b^2} =$ $\qquad c)\ (-7+\sqrt{2}).(3-5\sqrt{2}) =$

Para recordar:

Cuadrado de binomio: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2.a.b + b^2$

INSTITUTO FRAY MAMERTO ESQUIU
4ºC MATEMÁTICA

Diferencias de cuadrados: $(a+b).(a-b)=a^2-b^2$
Cubo de binomio: $(a\pm b)^3=a^3+3.a^2.b+3.a.b^2+b^3$
Ejemplo: a) $(\sqrt{3}+2)^2=$ b)$(5+\sqrt{2})(5-\sqrt{2})=$ c)$(\sqrt{5}+\sqrt{2})^3=$

6) Resolver aplicando propiedad distributiva:

a) $(\sqrt{5}+2).(\sqrt{5}+2)=$ b) $(2\sqrt{3}+4\sqrt{2}).(2\sqrt{3}-4\sqrt{2})$ c) $(\sqrt{7}-4)^2=$ d) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2=$

7) Resolver las operaciones indicadas, trabajando los radicales hasta su mínima expresión

$a)\ \sqrt{2}\,.\sqrt{8}=$

$b)\ \sqrt{ab}\,.\sqrt{a}=$

$c)\ \sqrt{ab^3}\,.\sqrt{ab}=$

$d)\ \left(6\sqrt{5}-3\sqrt{10}\right)^2=$

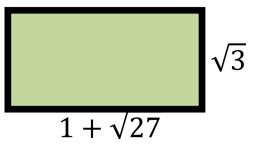
$e)\ \left(2\sqrt{5}+4\sqrt{8}\right)^2=$

$f)\ (\sqrt{5}-\sqrt{3}).(\sqrt{5}+\sqrt{3})=$

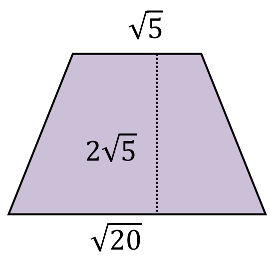
$g)\ \left(\sqrt{12}-2\sqrt{6}\right)^2=$

8) Hallar el valor exacto del perímetro y el área (en cm) de las siguientes figuras.

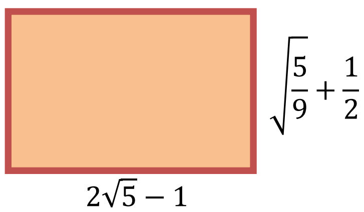
a)



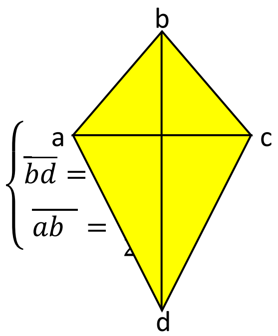
b) Isósceles



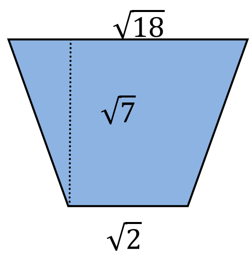
c)



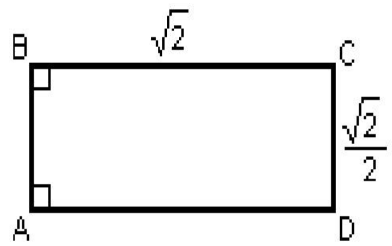
d) Romboide



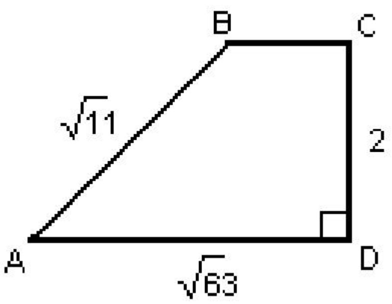
e) Isósceles



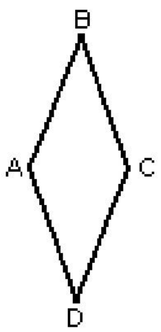
f)



g)

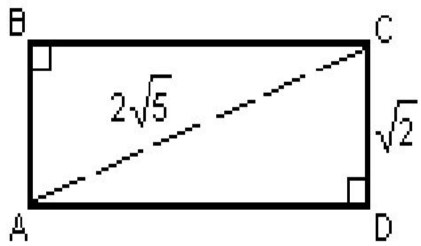


h)



$\overline{AC}=2$
$\overline{BD}=6$

i)



Potencias de exponente racional

Las raíces guardan una estrecha relación con las potencias de exponente racional no entero.
Recordamos la propiedad 1 de la radicación:
Exponentes racionales

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{m/n} \qquad con\ a > 0, \quad m, n \in \mathbb{N}$$

Todo radical puede convertirse en una potencia de exponente fraccionario, y de esa manera podemos aplicar todas las propiedades de la potenciación.

Por ejemplo: $\left(\sqrt{2}\right)^3 = 2^{3/2}$

$(3)^{4/7} = \sqrt[7]{3^4}$

$a)\ \sqrt{5} =$ $\qquad b)\ \sqrt[3]{7^2} =$ $\qquad c)\ \sqrt[5]{16} =$ $\qquad d)\ \sqrt[8]{32x^3} =$ $\qquad e)\ \sqrt[3]{3.\left(3.\sqrt[5]{3}\right)^2} =$

9) Realizar las siguientes operaciones aplicando propiedades.

$a)\ \dfrac{3^{1/2} : 3}{\left(3^2\right)^{-1/2}} =$

$b)\ \dfrac{8 :\ 2^4}{16\,.\,2^5} =$

$c)\ \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 . \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2} . \left(\dfrac{3}{2}\right) =$

$d)\ \left\{\dfrac{[(-2)^3]^2}{3}\right\}^{-1} =$

$e)\ \left[\left(2^{4/9}\right)^{1/2}\right]^{-3} : [(2^{-1})^2]^{-1/3} =$

$f)\ \sqrt[3]{\left[\sqrt{\dfrac{1}{5}}.\ 5^{3/2}.\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-1/3}\right]^{-2}} =$

$g)\ \left(2^{1/2}\right)^{3/2} . \left(\sqrt{2^5}\right)^{-2} =$

División en $\mathbb{R}$ - Racionalización de Denominadores.

Para resolver el problema de la división por un número ***irracional*** o una expresión algebraica irracional basta transformar el divisor o denominador ***irracional*** en un número ***racional***. Esta operación se conoce con el nombre de ***racionalización de denominador.***

Pueden presentarse tres casos.

- *PRIMER CASO:* *El denominador irracional es una raíz cuadrada*
  En este caso se agrega multiplicando, al numerador y al denominador, el mismo número irracional que figura en el divisor.

$$a)\ \frac{4\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\underbrace{\cdot\boxed{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}}_{\text{Agregado}} = \underbrace{\frac{\quad}{\quad} = \frac{}{}}_{\substack{\text{El radicando queda}\\ \text{elevado al}\\ \text{cuadrado y se}\\ \text{simplifica con la raíz}}} = \frac{}{} = \frac{}{}$$

$$b)\ \frac{2}{\sqrt{27}} = \frac{2}{\sqrt{3^3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}\cdot\boxed{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}} = \frac{\quad}{\quad}$$

$c)\quad \frac{2a^2}{\sqrt{243a}} = \frac{2a^2}{\sqrt{3^5 a}} = \frac{2a^2}{9\sqrt{3a}} \cdot \frac{\sqrt{3a}}{\sqrt{3a}} = \_\_\_\_ = \_\_\_\_ = \_\_\_\_$

- *SEGUNDO CASO: <u>El denominador irracional es una raíz de otro índice distinto de dos.</u>*
  En este caso se agrega multiplicando, al numerador y al denominador, una raíz de igual índice a la dada en el divisor, pero en el radicando de dicha raíz se agrega el factor conveniente de manera que se complemente para lograr igualar al índice.

$$a)\quad \frac{1}{\sqrt[5]{45x^4y^3}} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt[5]{3^2.5.x^4.y^3}}}_{\text{Factorear}} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{\sqrt[5]{3^3.5^4.x.y^2}}{\sqrt[5]{3^3.5^4.x.y^2}}}}_{\text{Agrego raíz de igual índice; y los mismos factores con el exponente necesario para llegar a igualar el índice.}} = \underbrace{\frac{\sqrt[5]{\quad}}{\sqrt[5]{\quad}}}_{\text{Producto de radicales de igual índice: se introducen todos los factores en un radical.}} = \underbrace{\_\_\_\_}_{\text{Se simplifican todos los factores.}} = \underbrace{\quad}_{\text{Expresión algebraica racional.}}$$

$b)\quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{48}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2^4.3}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt[3]{2.3}} \cdot \_\_\_\_ = \_\_\_\_ = \_\_\_\_ = \_\_\_\_ = \_\_\_\_$

- *TERCER CASO: <u>El denominador irracional es un binomio, en el que uno o ambos términos son números irracionales.</u>*
  En este caso se agrega multiplicando, al numerador y denominador, el conjugado del divisor; o sea, los mismos números pero cambiado de signo el segundo término.

$$\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \cdot \boxed{\_\_\_\_} = \_\_\_\_ = \_\_\_\_ = \_\_\_\_ = 2\sqrt{3} - 3$$

10) Racionalizar los denominadores

$a)\ \frac{2}{\sqrt{7}} =$	$j)\ \frac{2}{\sqrt[3]{5}} =$	$s)\ \frac{2}{\sqrt{3}-11} =$
$b)\ \frac{1}{\sqrt{3}} =$	$k)\ \frac{3}{\sqrt[3]{16}} =$	$t)\ \frac{5}{\sqrt{2}+3} =$
$c)\ \frac{5}{\sqrt{15}} =$	$l)\ \frac{2}{\sqrt[6]{16}} =$	$u)\ \frac{3}{4-\sqrt{2}} =$

$d)\ \dfrac{12}{\sqrt{6}} =$

$e)\ \dfrac{3}{2\sqrt{5}} =$

$f)\ \dfrac{2}{4\sqrt{8}} =$

$g)\ \dfrac{2a}{\sqrt{3ax}} =$

$h)\ \dfrac{5b}{\sqrt{7b}} =$

$i)\ \dfrac{2ab}{\sqrt{8ab}} =$

$m)\ \dfrac{5}{\sqrt[3]{4}} =$

$n)\ \dfrac{8}{\sqrt[5]{16}} =$

$o)\ \dfrac{6}{\sqrt[3]{2}} =$

$p)\ \dfrac{9}{\sqrt[3]{9a}} =$

$q)\ \dfrac{3}{\sqrt[6]{a^5.b^6.c^2}} =$

$r)\ \dfrac{3n}{\sqrt[3]{n^2m}} =$

$v)\ \dfrac{2}{1-\sqrt{7}} =$

$w)\ \dfrac{-5}{\sqrt{5}+1} =$

$x)\ \dfrac{6}{2-\sqrt{3}} =$

$y)\ \dfrac{10}{\sqrt{2}+5} =$

$z)\ \dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} =$

11) Resolver las siguientes ecuaciones

$a)\ \sqrt{3x-1} = 2$

$b)\ x^2 - \sqrt{3}x = 0$

$c)\ (3x-1)^2 = 6$

$d)\ x - \dfrac{1}{3}\sqrt{2} = \dfrac{3}{\sqrt{2}+1} - \dfrac{2}{1-\sqrt{2}}$

$e)\ \dfrac{x}{\sqrt{24}} + \dfrac{1}{5}\left(\sqrt{6}-2\right) = \dfrac{-3}{1+\sqrt{6}}$